

Rectas y planos

2.1 Rectas en el plano

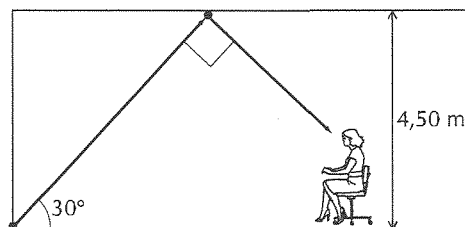
2.1.1 Ingeniería y rectas

SITUACIÓN INICIAL 1:

Un haz sonoro y direccional es emitido con ángulo de 30° , respecto de la horizontal, y se refleja en el cielorraso (también horizontal) ubicado a 4,50 metros de altura.

Si el ángulo de reflexión es recto, ¿a qué distancia del origen de coordenadas elegido (coincidente con la fuente emisora) debería colocarse una persona para optimizar la recepción del sonido?

Figura 2-1

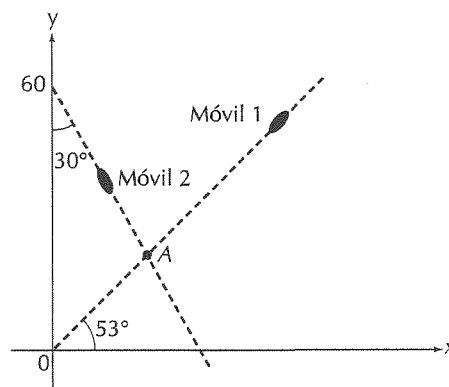


SITUACIÓN INICIAL 2:

Un móvil se traslada con trayectoria rectilínea, la cual forma un ángulo de 53° con la horizontal, de acuerdo con la figura 2-2 que se muestra, iniciando en el tiempo t_0 su recorrido desde la coordenada $(0; 0)$ a velocidad constante de 12 metros por segundo.

Desde un punto de coordenadas $(0; 60)$ parte simultáneamente otro móvil, cuya trayectoria forma una ángulo de 30° con el eje de ordenadas elegido, y se desplaza a velocidad constante.

Figura 2-2



- Obtener las coordenadas del punto A de encuentro de ambas trayectorias.
- ¿A qué velocidad debe desplazarse el segundo móvil para coincidir con el primero en el punto de encuentro de las trayectorias?

Introducción

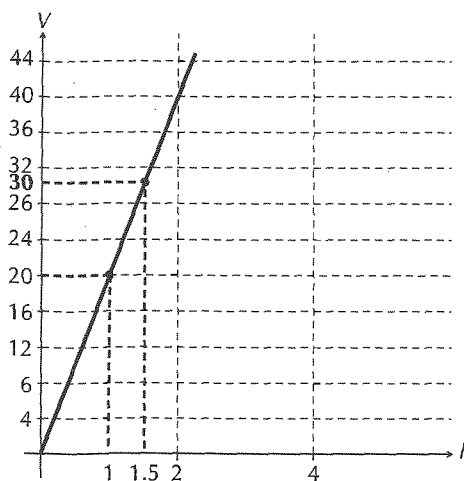
La ley de Ohm establece una relación entre la diferencia de potencial eléctrico aplicada a un material conductor y la intensidad de corriente que circula por el mismo.

Supongamos que se realiza un ensayo en cierto laboratorio de física y, utilizando el instrumental adecuado (un voltímetro y un amperímetro), se mide, para un tramo de conductor determinado, una diferencia de potencial de 20 V y una intensidad de corriente de 1 A.

Sobre ese mismo tramo de conductor se efectúa un segundo ensayo. La diferencia de potencial aplicada es entonces de 30 V con intensidad de corriente de 1,5 A. También se observa que si la diferencia de potencial aplicada es nula, no circula corriente.

¿Cuál es la gráfica del experimento?

Figura 2-3



A partir del experimento anterior se puede inferir que, para el caso en estudio, $\Delta V = k \cdot I$; donde ΔV es la diferencia de potencial expresada en voltios, I es la intensidad de corriente expresada en amperios, y k es la constante de proporcionalidad, que en este ejemplo vale 20. Con el propósito de homogeneizar las unidades en la igualdad anterior, físicamente debe adoptarse una unidad de medida adecuada para esa constante. Como el lector seguramente sabe, dicha unidad es el ohm, cuyo símbolo es Ω . ¿Qué representa k ? Físicamente es la resistencia que el conductor opone al paso de la corriente. Ciertamente, en física así se le denomina, y la ley de Ohm suele escribirse como $\Delta V = RI$, donde R es dicha constante.

De manera matemática, nos está indicando que existe una relación lineal entre la diferencia de potencial aplicada y la corriente que circula.

Las funciones lineales son sólo una clase de funciones que podemos definir en el campo de la matemática. Sin embargo, muchos problemas de física y ciencias de la ingeniería en general responden a funciones lineales. De allí la importancia de su conocimiento y estudio.

La figura 2-3 muestra la representación gráfica de una función lineal. En geometría es una recta. Los puntos de la recta guardan una relación semejante a lo que ocurre con la diferencia de potencial y la intensidad de la corriente en la ley de Ohm.

Si en lugar de escribir $\Delta V = R \cdot I$ escribimos $y = k \cdot x$, tenemos la misma relación, sólo hemos dado a las variables nombres diferentes, y a la constante de proporcionalidad también.

Como podemos ver, esto es muy interesante. La geometría la asociamos siempre a rectas, curvas, figuras, superficies o volúmenes, pero acabamos de ver que una recta se puede expresar perfectamente y quedar unívocamente definida mediante una ecuación algebraica. Este es el principio básico de la geometría analítica que estudiaremos en los capítulos 2, 3 y 4 de la presente obra. Nuestro objetivo será encontrar de qué manera podemos describir lugares geométricos empleando expresiones analíticas y viceversa.

En particular, en esta sección del capítulo 2, analizaremos cómo los vectores nos permiten describir ecuaciones de rectas en el plano, y cómo también mediante vectores se resuelven distintas situaciones geométricas como son las posiciones relativas, el paralelismo, la perpendicularidad, el cálculo de ángulos entre dos rectas y distancias.

Objetivos

Esperamos que al finalizar la lectura comprensiva y activa de la presente sección, usted pueda:

- Encontrar las ecuaciones vectoriales y cartesianas de rectas ubicadas en el plano y representarlas gráficamente
- Investigar la posición relativa de rectas en el plano
- Resolver problemas de distancias y ángulos en el plano coordenado
- Describir una familia de rectas sujeta a condiciones geométricas

2.1.2 Ecuaciones de la recta que pasa por un punto y es paralela a la dirección de un vector

2.1.2.1 Ecuación paramétrica vectorial de la recta en \mathbb{R}^2

Sean un punto $P_0(x_0; y_0)$ del plano y un vector $\vec{d} = (d_1; d_2)$ distinto del vector nulo.

¿Existe una recta en el plano que pase por P_0 y sea paralela a la dirección del vector \vec{d} ?

A partir de los axiomas de la geometría euclídeana, sabemos que por un punto pasan infinitas rectas; y por un punto extenso a una recta pasa una paralela (ver figura 2-4).

Lo previo justifica la existencia geométrica de la recta, pero ¿cuál es la condición analítica que debe verificar un punto $P(x; y)$ para pertenecer a dicha recta?

Sean \vec{p}_0 y \vec{p} los vectores posición de los puntos $P_0(x_0; y_0)$ y $P(x; y)$ y entonces $\vec{p} = \vec{p}_0 + \vec{p}_0\vec{p}$ (I) (ver figura 2-5).

Por otra parte, si el punto $P(x; y)$ pertenece a la recta, entonces el vector $\vec{p}_0\vec{p}$ es paralelo al vector \vec{d} , es decir, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{p}_0\vec{p} = \lambda \vec{d}$ (II) (ver figura 2-5).

A partir de (I) y (II), resulta que el vector \vec{p} será el vector posición de un punto $P(x; y)$ perteneciente a la recta r si, y sólo si, $\vec{p} = \vec{p}_0 + \lambda \vec{d}$

Al reemplazar por las coordenadas de los vectores, se tiene la ecuación de la recta r :

$$(x; y) = (x_0; y_0) + \lambda (d_1; d_2), \text{ siendo } \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{III})$$

Esta ecuación recibe el nombre de ecuación paramétrica vectorial de la recta en \mathbb{R}^2 , puesto que el punto $P(x; y)$ con vector posición \vec{p} será un punto perteneciente a la recta r si, y sólo si, existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que se cumpla (III).

Al vector \vec{d} se le denomina vector director asociado a la recta, o dirección asociada a la recta. Es importante notar que el vector director de una recta no es único, cualquier múltiplo escalar de un vector director es también vector director de la recta, pues lo que interesa de este vector

Figura 2-4

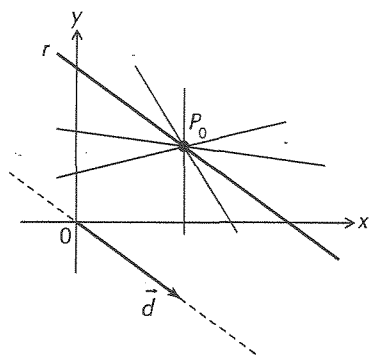
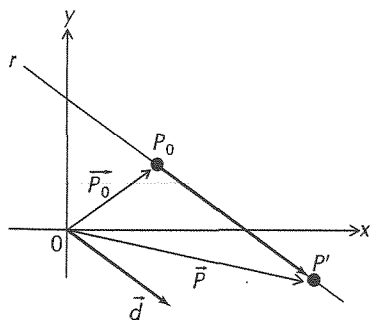


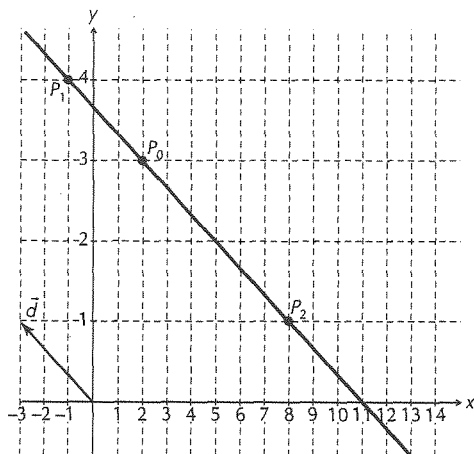
Figura 2-5



es que su dirección sea paralela a la recta. (Recordemos que el producto de un vector por un escalar no nulo mantiene invariante la dirección del vector.)

Ejemplo 1

Determinar una ecuación paramétrica vectorial de la recta que pasa por el punto $P_0(2; 3)$ y es paralela al vector $\vec{d} = (3; 1)$. Representar gráficamente.

Solución**Figura 2-6**

Según (III), una ecuación paramétrica vectorial de la recta es $r: (x; y) = (2; 3) + \lambda(-3; 1)$, siendo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Una forma de realizar la representación gráfica de la recta es asignar valores reales al parámetro λ de la ecuación de la recta, por ejemplo:

λ	Ecuación de la recta	Punto de la recta
0	$(x; y) = (2; 3) + 0(-3; 1)$	$(x; y) = (2; 3)$
1	$(x; y) = (2; 3) + 1(-3; 1)$	$(x; y) = (-1; 4)$
-2	$(x; y) = (2; 3) + (-2)(-3; 1)$	$(x; y) = (8; 1)$

A partir de la tercera columna de la tabla, podemos representar gráficamente la recta (ver figura 6).

Ejercicio 2-1

Encontrar una ecuación paramétrica vectorial de la recta sabiendo que

- $P_0(-5; 3)$ pertenece a la recta y es paralela al vector $\vec{d} = (2; 2)$
- $P_0(-1; -3)$ pertenece a la recta y es paralela al eje de abscisas.
- $P_0(-1; 3)$ y $P_1(4; 3)$ pertenecen a la recta.
- $P_0(0; 7)$ pertenece a la recta y es paralela al vector que definen los puntos $A(2; 3)$ y $B(-4; 3)$.

Efectuar la representación gráfica de la recta en cada caso.

2.1.2.2 Ecuación paramétrica cartesiana de la recta en \mathbb{R}^2

Consideremos la ecuación paramétrica vectorial de la recta $r: (x; y) = (x_0; y_0) + \lambda(d_1; d_2)$ que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$, y cuyo vector director es $\vec{d} = (d_1; d_2) \neq 0$

Al resolver las operaciones presentes en el segundo miembro de la igualdad y aplicar la condición analítica de igualdad entre vectores, resulta que la ecuación de la recta es:

$$r: \begin{cases} x = x_0 + \lambda d_1 \\ y = y_0 + \lambda d_2 \end{cases}, \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Este sistema de ecuaciones se denomina ecuaciones paramétricas cartesianas de la recta en \mathbb{R}^2 , puesto que el punto $P(x; y)$ será un punto perteneciente a la recta r si, y sólo si, existe una $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que se cumplan las siguientes igualdades: $x = x_0 + \lambda d_1$ y $y = y_0 + \lambda d_2$.

Ejemplo 2

Sea la ecuación paramétrica vectorial de una recta en \mathbb{R}^2 , $r: (x; y) = (2; 3) + \lambda(-3; 1)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Encontrar una ecuación paramétrica cartesiana de la recta r .
- Encontrar las coordenadas de dos puntos de la recta.
- Obtener las coordenadas de los puntos de intersección de la recta con los ejes coordenados.

Solución

a) A partir de la ecuación paramétrica vectorial, resulta que $(x; y) = (2 - 3\lambda; 3 + \lambda)$.

Al aplicar el concepto de igualdad de vectores obtenemos la ecuación paramétrica cartesiana de la recta, siendo $r: \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 3 + \lambda \end{cases}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ (I)

b) Para contestar este ítem es suficiente con asignar en (I) valores reales al parámetro λ , una respuesta, entre las infinitas posibles respuestas, es:

$$\text{Si } \lambda = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 3 \cdot 2 = -4 \\ y = 3 + 2 \cdot 1 = 5 \end{cases} \Rightarrow A(-4; 5) \in r$$

$$\text{Si } \lambda = -4 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 3 \cdot (-4) = 14 \\ y = 3 + (-4) \cdot 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow B(14; -1) \in r$$

c) Recordemos que un punto pertenece al eje de abscisas cuando $y = 0$, siendo sus coordenadas de la forma $(x; 0)$; y un punto pertenece al eje de ordenadas cuando $x = 0$, siendo las coordenadas de estos puntos de la forma $(0; y)$

Entonces, para encontrar las coordenadas del punto donde la recta corta al eje de abscisas, asumimos que en (I) $y = 0$, y resulta

$$\begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ 0 = 3 + \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ \lambda = -3 \end{cases} \Rightarrow x = 11.$$

Por lo tanto, la recta corta al eje de abscisas en el punto $P_1(11; 0)$.

Luego, para encontrar las coordenadas del punto donde la recta corta al eje de ordenadas, asumimos en (I) : $x = 0$, resulta:

$$\begin{cases} 0 = 2 - 3\lambda \\ y = 3 + \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{2}{3} \\ y = 3 + \lambda \end{cases} \Rightarrow y = \frac{11}{3}$$

Por lo tanto, la recta corta al eje de ordenadas en el punto $P_2\left(0; \frac{11}{3}\right)$

Ejercicio 2-2

Determinar la ecuación paramétrica cartesiana de la recta si:

- $P_0(0; 0)$ es un punto de la recta y ésta es paralela al vector $\vec{d} = (-2; 3)$.
- $P_0(2; 0)$ es un punto de la recta y ésta es paralela al eje de ordenadas.
- $P_0(1; -4)$ y $P_1(1; 5)$ pertenecen a la recta.
- La recta pasa por el punto medio del segmento de extremos $A(2; 3)$ y $B(-4; 3)$ y por el punto extremo del vector $\vec{AP} = (10; -6)$.

Realizar la representación gráfica de la recta en cada caso.

2.1.2.3 Ecuación simétrica de la recta en \mathbb{R}^2

Consideremos la ecuación paramétrica cartesiana de la recta r $\begin{cases} x = x_0 + \lambda d_1 \\ y = y_0 + \lambda d_2 \end{cases}$ con, $\lambda \in \mathbb{R}$ (I),

que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$ y cuyo vector director es $\vec{d} = (d_1; d_2)$, siendo $d_1 \neq 0$ y $d_2 \neq 0$

En (I), es posible expresar al parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ en función de los restantes parámetros, ya que por hipótesis las coordenadas del vector director de la recta son no nulas; así, ope-

rando miembro a miembro, resulta que: $\lambda = \frac{x - x_0}{d_1} \quad \wedge \quad \lambda = \frac{y - y_0}{d_2}$

Luego, por la propiedad transitiva de la igualdad, se tiene la ecuación de la recta:

$$r: \frac{x - x_0}{d_1} = \frac{y - y_0}{d_2}$$

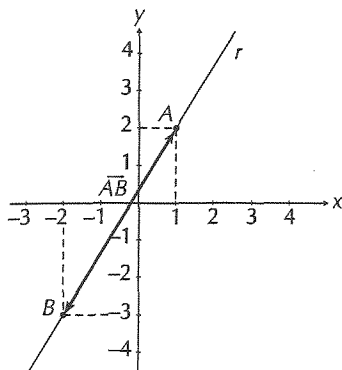
Esta ecuación se denomina ecuación simétrica, o continua, de la recta en \mathbb{R}^2 que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$ y cuyo vector director es $\vec{d} = (d_1; d_2)$, siendo $d_1 \neq 0$ y $d_2 \neq 0$.

Observemos que, en la ecuación simétrica de la recta, está presente el concepto de paralelismo entre los vectores $\vec{P_0P}$ —definido por los puntos $P(x; y)$ y $P_0(x_0; y_0)$ pertenecientes a la recta— y el vector \vec{d} director de la recta.

También, advierta que si se conoce la ecuación de la recta expresada en forma simétrica, es posible identificar de inmediato un punto y un vector director de la recta; y con estos datos basta para representarla de modo gráfico.

Ejemplo 3

Encontrar una ecuación simétrica de la recta que pasa por los puntos $A(1; 2)$ y $B(-2; -3)$, y representarla gráficamente.

Solución
Figura 2-7


Como $A(1; 2)$ y $B(-2; -3)$ son puntos de la recta (ver figura 2-7), podemos considerar como vector director de la recta al vector determinado por dichos puntos, $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (-2 - 1; -3 - 2) = (-3; -5)$.

Luego, considerando la recta que pasa por el punto $B(-2; -3)$ y tiene como vector director al vector \overrightarrow{AB} , resulta que la ecuación simétrica de la recta es

$$r: \frac{x - x_0}{d_1} = \frac{y - y_0}{d_2} \Rightarrow r: \frac{x + 2}{-3} = \frac{y + 3}{-5}$$

Para efectuar la representación gráfica de la recta es suficiente con incluir en el sistema de coordenadas cartesianas a los puntos $A(1; 2)$ y $B(-2; -3)$, pues sabemos que por dos puntos pasa una, y sólo una, recta.

Nótese que para obtener la ecuación de la recta se podría usar cualquier otro punto, por ejemplo, el punto A y también otro vector director, como su \overrightarrow{BA} .

Ejercicio 2-3

Obtener, cuando sea posible, una ecuación simétrica de la recta:

- Cuya ordenada al origen es 5 y abscisa al origen es 3.
- Si $P_0(-7; 2)$ es un punto de la recta y ésta es paralela al vector $\vec{d} = (1; -2)$
- $P_0(5; -1)$ y $P_1(-1; 4)$ pertenecen a la recta.
- Cuando contiene a la mediana trazada desde el vértice A del triángulo cuyos vértices son los puntos $A(-3; -2)$, $B(3; 1)$, y $C(6; -4)$

Trazar el gráfico para cada situación planteada.

2.1.3 Ecuación de la recta que pasa por un punto y es perpendicular a la dirección de un vector en \mathbb{R}^2

2.1.3.1. Ecuación implícita o general de la recta en \mathbb{R}^2

Sean un punto $P_0(x_0; y_0)$ del plano y un vector $\vec{n} = (n_1; n_2)$ distinto del vector nulo.

¿Existe una recta en el plano que pase por P_0 y sea perpendicular a la dirección del vector \vec{n} ?

Como ya establecimos, por un punto pasan infinitas rectas y, en este caso, es una propiedad que, dada una recta, es posible construir gráficamente, empleando dos escuadras, una perpendicular a la recta. Por estas razones, podemos afirmar que existe una recta que pasa por el punto dado y es perpendicular a la dirección del vector conocido, tal como se muestra en la figura 2-8.

Figura 2-8

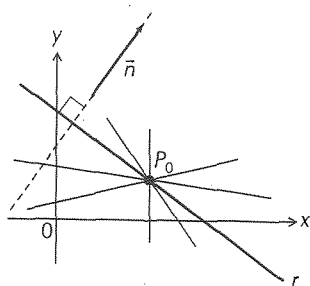
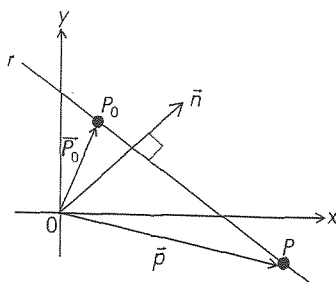


Figura 2-9



Lo previo argumenta la existencia geométrica de la recta, pero ¿cuál es la condición analítica que debe verificar un punto $P_0(x_0; y_0)$ para pertenecer a dicha recta?

Sean \vec{p}_0 y \vec{p} los vectores posición de los puntos $P_0(x_0; y_0)$ y $P(x; y)$, entonces; $\vec{p}_0 \vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0$ (I) (ver figura 2-9).

Por otra parte, si el punto $P(x; y)$ pertenece a la recta, entonces el vector $\vec{p}_0 \vec{p}$ es perpendicular al vector \vec{n} ; es decir, $\vec{p}_0 \vec{p} \cdot \vec{n} = 0$, (II) (ver figura 2-9).

De (I) y (II) resulta que el vector \vec{p} es el vector posición de un punto $P(x; y)$ perteneciente a la recta r si, y sólo si, $(\vec{p} - \vec{p}_0) \cdot \vec{n} = 0$. (III)

Entonces, reemplazando en (III) por las coordenadas de los vectores, se tiene

$$(x - x_0; y - y_0) \cdot (n_1; n_2) = 0$$

Al resolver el producto escalar entre estos vectores, resulta

$$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) = 0$$

Luego, operando en \mathbb{R} , $n_1x + n_2y + (-n_1x_0 - n_2y_0) = 0$

Por último, si convenimos en designar que:

$$n_1 = A, \quad (IV)$$

$$n_2 = B, \quad (V)$$

$$(-n_1x_0 - n_2y_0) = C$$

Se tiene que la ecuación de la recta es:

$$r: Ax + By + C = 0$$

Esta expresión de la recta en \mathbb{R}^2 se denomina ecuación implícita, o general, de la recta, donde los coeficientes A y B no son simultáneamente nulos.

Al vector $\vec{n} = (n_1; n_2)$ distinto del vector nulo, cuya dirección es perpendicular a la recta, se le denomina vector normal de la recta. Es importante recordar que el vector normal de una recta no es único, sino que cualquier múltiplo escalar de un vector normal es también vector normal de la recta, porque el producto de un vector por un escalar no nulo mantiene invariante la dirección del vector.

Otro dato importante para recordar, y que surge de la deducción de la ecuación [ver (IV) y (V)], es que dada la ecuación implícita de la recta $r: Ax + By + C = 0$, los coeficientes A y B son las coordenadas de un vector cuya dirección es perpendicular a la recta, es decir, $\vec{v} = (A; B) \perp r$

Ejemplo 4

Encontrar una ecuación implícita de la recta que pasa por el punto $P_0(1; 3)$ y es perpendicular al vector $\vec{n} = (2; -4)$.

Figura 2-10

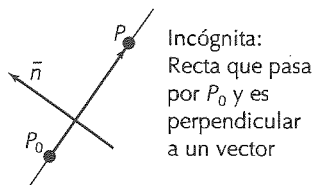
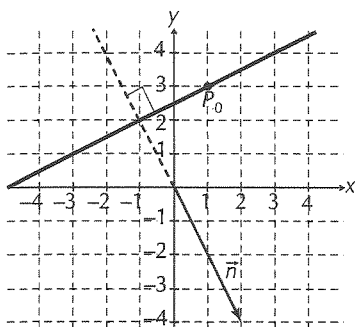


Figura 2-11



Solución

En general, para resolver ejercicios de geometría conviene utilizar una representación gráfica que se denomina figura de análisis. Esto es, usar un gráfico que permita interpretar los datos y poner en claro cuál es la incógnita, así como establecer la estrategia que lleve a una respuesta adecuada. En la figura 2-10 se presenta la figura de análisis del ejercicio.

Considerando el punto $P_0(1; 3) \in r$ y siendo $P(x; y)$ un punto genérico de la recta, queda definido el vector $\overrightarrow{P_0P}$ que, tal como se observa en la figura de análisis, resulta paralelo a la recta y , en consecuencia, es perpendicular al vector normal de la recta, $\vec{n} = (2; -4)$.

Entonces, siendo $\overrightarrow{p_0}$ y \vec{p} los vectores posición de los puntos $P_0(x_0; y_0)$ y $P(x; y)$, la ecuación de la recta es:

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (\vec{p} - \vec{p_0}) \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (x-1; y-3) \cdot (2; -4) = 0$$

$$\text{Por lo tanto, } 2(x-1) - 4(y-3) = 0 \Rightarrow r \rightarrow 2x - 4y + 10 = 0$$

La figura 2-11 muestra la gráfica de la recta cuya ecuación hemos encontrado.

2.1.3.1.1 Casos particulares

Sea $r: Ax + By + C = 0$ la ecuación implícita o general de la recta en \mathbb{R}^2 , donde los coeficientes A y B no son simultáneamente nulos.

De este modo,

- Si $A = 0$, entonces la ecuación de la recta se reduce a $r: By + C = 0$, su vector normal es $\vec{n} = (0; B)$, por lo tanto es paralela al eje de abscisas (ver figura 2-12). En particular, si además $C = 0$, tenemos la ecuación del eje de abscisas. Estas rectas se denominan rectas horizontales.

Ejemplo 5

La recta $r: y - 2 = 0$ es paralela al eje de abscisas.

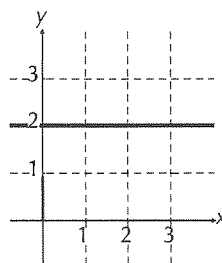


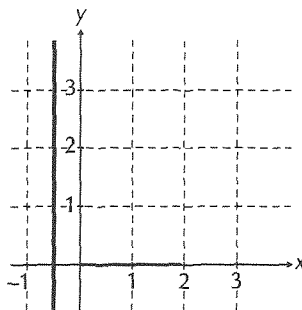
Figura 2-12

$$r: y - 2 = 0, \vec{n} = (0; 1)$$

- Si $B = 0$, entonces la ecuación de la recta se reduce a $r: Ax + C = 0$, su vector normal es $\vec{n} = (A; 0)$, por lo tanto es paralela al eje de ordenadas. En particular, si $C = 0$, tenemos la ecuación del eje de ordenadas. Estas rectas se denominan rectas verticales.

Ejemplo 6

La recta $r: 2x + 1 = 0$ es paralela al eje de ordenadas.

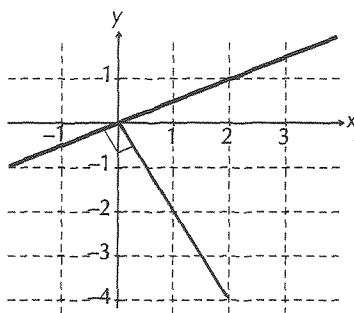
**Figura 2-13**

$$r: 2x + 1 = 0, \vec{n} = (2; 0)$$

■ Si $C = 0$ (siendo $A \neq 0$ y $B \neq 0$), entonces la ecuación de la recta se reduce a la $r: Ax + By = 0$ que pasa por el origen de coordenadas.

Ejemplo 7

La recta $r: 2x - 4y = 0$ pasa por el origen de coordenadas.

**Figura 2-14**

$$r: 2x - 4y = 0, \vec{n} = (2; -4)$$

2.1.3.2 Ecuación segmentaria de la recta

Sea una recta $r: Ax + By + C = 0$ no paralela a los ejes coordenados y que no contiene al origen de coordenadas; esto es, A, B y C son números reales no nulos.

$$\text{Entonces, } r: Ax + By + C = 0 \Rightarrow \left(-\frac{A}{C}\right)x + \left(-\frac{B}{C}\right)y = 1, \text{ pues } C \neq 0 \quad (\text{I})$$

$$\text{Siendo (I) equivalente con } \frac{x}{\left(-\frac{C}{A}\right)} + \frac{y}{\left(-\frac{C}{B}\right)} = 1$$

Si convenimos en llamar $p = \left(-\frac{C}{A}\right)$ y $q = \left(-\frac{C}{B}\right)$, resulta la ecuación de la recta:

$$r: \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

Esta expresión se denomina ecuación segmentaria de la recta, siendo p y q la abscisa y la ordenada al origen, respectivamente.

A continuación comprobamos que los números reales no nulos p y q se corresponden con la abscisa al origen y la ordenada al origen, respectivamente.

$$\text{Sea la ecuación segmentaria } r: \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1 \quad (\text{I})$$

Para determinar la intersección de la recta con el eje de abscisas, en (I), proponemos $y = 0$, entonces:

$$\frac{x}{p} + \frac{0}{q} = 1 \Rightarrow \frac{x}{p} = 1 \Rightarrow x = p$$

Por lo tanto, la recta corta al eje x en el punto $P_1(p; 0)$ (II)

Para determinar la intersección de la recta con el eje de ordenadas, en (I) proponemos $x = 0$, entonces:

$$\frac{0}{p} + \frac{y}{q} = 1 \Rightarrow \frac{y}{q} = 1 \Rightarrow y = q$$

Por lo tanto, la recta corta al eje y en el punto $P_2(0; q)$. (III)

Por (II) y (III), se verifica que los valores reales no nulos p y q representan la abscisa al origen y la ordenada al origen de la recta, respectivamente.

Ejemplo 8

Sea la recta $r: 4x + 8y - 2 = 0$.

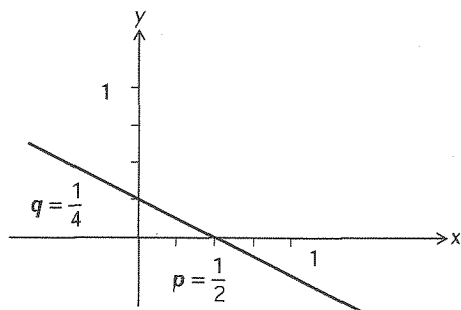
Encontrar una ecuación segmentaria de esta recta y representarla gráficamente.

Solución

Para determinar una ecuación segmentaria, operamos miembro a miembro en la ecuación implícita de la recta.

$$r: 4x + 8y - 2 = 0 \Rightarrow 4x + 8y = 2 \Rightarrow \frac{4}{2}x + \frac{8}{2}y = 1 \Rightarrow \frac{x}{\frac{1}{2}} + \frac{y}{\frac{1}{4}} = 1$$

Figura 2-15



Entonces la recta dada tiene abscisa al origen de $\frac{1}{2}$ y ordenada al origen de $\frac{1}{4}$; es decir, corta a los ejes coordenados x y y en los puntos $P\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ y $Q\left(0; \frac{1}{4}\right)$ y, respectivamente.

De modo gráfico (ver figura 2-15).

¿Cuál es la ventaja de expresar una recta en forma segmentaria? Que se puede realizar su gráfica casi sin efectuar cálculos, pues los números p y q definen la abscisa y la ordenada, respectivamente, de los puntos donde la recta corta los ejes coordenados. ¿Porqué entonces, siendo tan útil, no es la ecuación que más se utiliza? Para contestar esta pregunta, dejamos al lector la tarea de pensar si es posible escribir la forma segmentaria de una recta que pasa por el origen de coordenadas.

2.1.3.3 Ecuación explícita de la recta en \mathbb{R}^2

Sea la ecuación implícita o general de la recta $r: Ax + By + C = 0$.

Si $B \neq 0$, resulta posible explicitar la variable y en función de la variable x , tal como se muestra a continuación.

$$r: Ax + By + C = 0 \Rightarrow r: By = -Ax - C \Rightarrow r: y = \left(-\frac{A}{B}\right)x + \left(-\frac{C}{B}\right). \quad (I)$$

Si convenimos en designar que $\left(-\frac{A}{B}\right) = m$ y $\left(-\frac{C}{B}\right) = b$ y reemplazamos en (I), resulta la ecuación de la recta

$$r: y = mx + b$$

Expresión que se denomina ecuación explícita de la recta de pendiente m y ordenada al origen b

¿Por qué el término independiente b de una recta expresada en forma explícita como $r: y = mx + b$ es la ordenada al origen de la recta?

Si asignamos $x = 0$ en la ecuación de la recta $r: y = mx + b$, surge $y = b$.

Entonces, la recta intercepta al eje de ordenadas en el punto $P(0; b)$.

Por lo tanto, el término independiente de la forma explícita de la recta b es la ordenada al origen de la recta.

Ejemplo 9

La ordenada al origen de la recta $r: y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ es $b = \frac{1}{4}$, entonces la recta intercepta al eje de ordenadas en el punto $P\left(0; \frac{1}{4}\right)$

¿Cómo se define geoméricamente la pendiente de una recta?

Para definir geoméricamente el concepto de pendiente de una recta, resulta necesario definir qué se entiende por ángulo de inclinación de una recta.

El ángulo de inclinación de una recta es el ángulo formado entre el eje de abscisas en sentido positivo y la recta, cuando ésta se considera dirigida hacia arriba (ver figuras 2-16 a y 2-16 b).

Si convenimos en llamar θ al ángulo de inclinación de una recta, la medida de este ángulo es cualquier valor real comprendido entre 0 y π , es decir, $0 \leq \theta \leq \pi$.

Entonces,

Se llama pendiente de una recta no vertical, que indicaremos con m , a la tangente de su ángulo de inclinación.

En símbolos: $m = \operatorname{tg} \theta \quad (I)$

A partir de (I), se observa que la pendiente de una recta puede tomar todos los valores reales.

Si θ es agudo, $m = \operatorname{tg} \theta > 0$, entonces se dice que la recta tiene pendiente positiva (ver figura 2-16 a).

Si θ es obtuso, $m = \operatorname{tg} \theta < 0$, entonces se dice que la recta tiene pendiente negativa (ver figura 2-16 b).

En el caso de rectas horizontales el ángulo de inclinación es 0 y $m = \operatorname{tg} \theta = 0$, y la pendiente es nula (ver figura 2-16 c).

Si la recta es vertical, su ángulo de inclinación es $\frac{\pi}{2}$ (ver figura 2-16 d). Recordemos que la tangente de $\frac{\pi}{2}$ no está definida, en consecuencia, el concepto de pendiente no puede aplicarse a rectas verticales y este tipo de rectas no pueden describirse mediante la forma explícita.

Figura 2-16 (a)

θ es el ángulo de inclinación de la recta $m > 0$

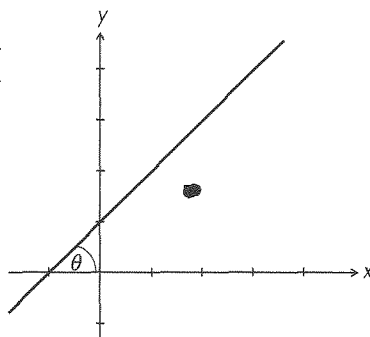


Figura 2-16 (b)

θ es el ángulo de inclinación de la recta $m < 0$

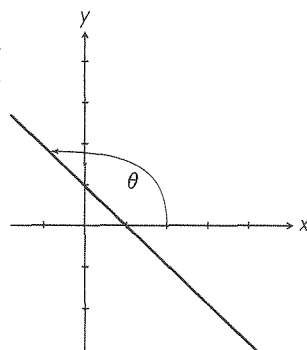


Figura 2-16 (c)

$\theta = 0$ es el ángulo de inclinación de la recta $m = 0$

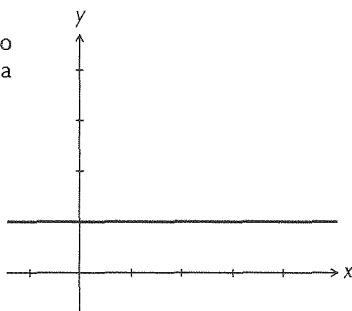
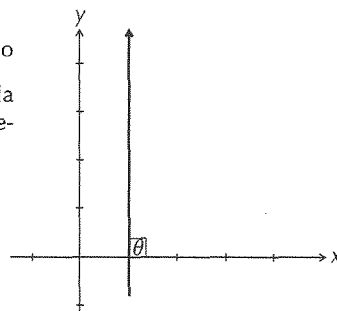


Figura 2-16 (d)

$\theta = \frac{\pi}{2}$ es el ángulo de inclinación de la recta m no está definida



Ejemplo 10

Encontrar el ángulo de inclinación de las rectas $r_1: y = -x + 4$, $r_2: y = \frac{2}{3}x - 1$

Solución

Llamando θ al ángulo de inclinación de la recta, se tiene que $\operatorname{tg} \theta = m$, por lo tanto:

El ángulo de inclinación de la recta $r_1: y = -x + 4$ es $\theta = \operatorname{arctg}(-1) = \frac{3}{4}\pi$

El ángulo de inclinación de la recta $r_2: y = \frac{2}{3}x - 1$ es $\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{3}\right) \cong 33^\circ 41'$

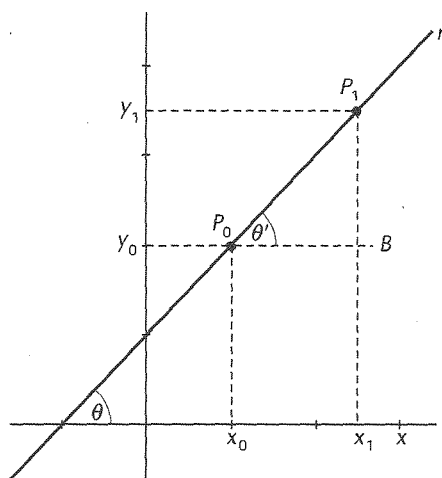
En lo que sigue de esta sección, abordaremos la forma de obtener la ecuación explícita de una recta cuando se tienen por datos la pendiente y un punto, o bien dos puntos de la recta.

Teorema 1

Si $P_0(x_0; y_0)$ y $P_1(x_1; y_1)$ son dos puntos cualesquiera y diferentes de una recta no vertical, la pendiente de la recta es $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$

Demostración

Figura 2-17



En la figura 2-17 se presenta una recta r no vertical que pasa por los puntos $P_0(x_0; y_0)$ y $P_1(x_1; y_1)$, y cuyo ángulo de inclinación denominamos θ .

Si por los puntos P_0 y P_1 trazamos rectas perpendiculares al eje de abscisas y por P_0 una recta perpendicular al eje de ordenadas, resulta el ángulo θ' congruente con θ por ser ángulos correspondientes entre rectas paralelas cortadas por una transversal.

$$\text{Entonces } m = \operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \theta' = \frac{\operatorname{long.} \overline{P_1B}}{\operatorname{long.} \overline{P_0B}} \quad (\text{I})$$

A partir de conocer las coordenadas de los puntos P_0 y P_1 , se tiene

$$\operatorname{long.} \overline{P_1B} = y_1 - y_0 \quad (\text{II})$$

$$\operatorname{long.} \overline{P_0B} = x_1 - x_0 \quad (\text{III})$$

Entonces, por reemplazo de (II) y (III) en (I), se obtiene lo que se quería demostrar:

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad (\text{IV})$$

Observaciones: Conceptualmente la pendiente de una recta (no vertical) reduce la cantidad de desplazamiento vertical por cada unidad de cambio horizontal. En la fórmula (IV) el cambio vertical está dado por: $y_1 - y_0$, que se denota Δy (delta y), y este cambio vertical se corresponde con el cambio horizontal: $x_1 - x_0$, que se denota Δx (delta x). Por esto, es común decir que $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Observemos que la fórmula para calcular la pendiente de una recta, establecida por el teorema 1, no está definida analíticamente cuando $x_1 = x_0$.

Si $x_1 = x_0$, los puntos considerados son de igual abscisa, por lo tanto, la recta que definen es vertical y, como se estableció previamente, las rectas verticales no tienen determinada su pendiente.

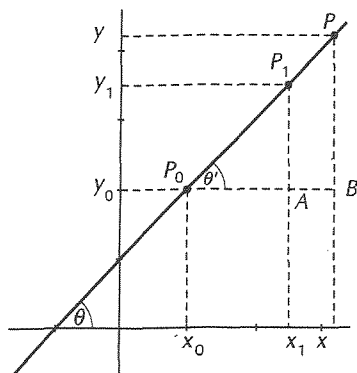
A partir de este teorema surge el siguiente:

Teorema 2

La recta que pasa por los puntos $P_0(x_0; y_0)$ y $P_1(x_1; y_1)$ tiene por ecuación $\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0}$, siendo $x_1 \neq x_0 \wedge y_1 \neq y_0$.

Demostración

Figura 2-18



Sean $P_0(x_0; y_0)$ y $P_1(x_1; y_1)$ dos puntos de una recta, siendo $P(x; y)$ un punto genérico de la misma, como se observa en la figura 2-18.

A partir de los puntos considerados se determinan los triángulos rectángulos $P_0\hat{P}_1A$ y $P_1\hat{P}_0B$.

Donde se observa que los ángulos correspondientes son congruentes, entonces los triángulos son semejantes.

Por ser triángulos semejantes, las longitudes de los lados homólogos son proporcionales, entonces se cumple que $\frac{\overline{P_1A}}{\overline{P_0A}} = \frac{\overline{P_0B}}{\overline{P_1B}}$

Al calcular las longitudes de los segmentos en función de las coordenadas de los puntos, se tiene $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{x - x_0}$ (I)

A partir de (I), se logra lo que se quería demostrar:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \quad (\text{II})$$

En función de los teoremas 1 y 2, se deduce la ecuación de la recta denominada ecuación punto-pendiente.

$$\text{A partir de (II) surge } y - y_0 = \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \right) (x - x_0)$$

$$\text{Por el teorema 1, sabemos que } m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Entonces,

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad (\text{III})$$

La fórmula (III) se denomina ecuación punto-pendiente.

La ecuación (III) de la recta pone en evidencia que con dos condiciones —la pendiente de la recta y un punto perteneciente a ella— se tienen los datos suficientes para obtener la ecuación de la recta.

También podemos analizar dicha ecuación bajo otro enfoque, teniendo en cuenta lo enunciado en los apartados 2.1.3 y 2.1.4, esto es: existen infinitas rectas que pasan por un punto, pero sólo una de ellas tiene pendiente m prefijada.

Ejemplo 11

Encontrar una ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(-1; 3)$ y $B(4; 2)$

Solución

A partir del teorema 2 se tiene que

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0}, \text{ entonces: } \frac{x+1}{4+1} = \frac{y-3}{2-3} \Rightarrow \frac{x+1}{5} = \frac{y-3}{-1} \quad (I)$$

Advierta que la ecuación de la recta obtenida en (I) a partir de aplicar el teorema 2, no es otra que la ecuación simétrica o continua de una recta, ya que las diferencias $(x_1 - x_0)$ y $(y_1 - y_0)$ son las coordenadas del vector \overline{AB} que es paralelo a la recta, debido a que estos puntos pertenecen a la recta.

A partir de (I), podemos obtener la ecuación explícita y la ecuación implícita. Veamos cómo:

Si en (I) resolvemos las operaciones presentes de manera tal que se exprese la variable y en función de la variable x , obtenemos la ecuación explícita de la recta: $y = -\frac{1}{5}x + \frac{14}{5}$

En cambio, si en (I) resolvemos las operaciones e igualamos a cero, obtenemos la ecuación implícita de la recta: $x + 5y - 14 = 0$

Ejemplo 12

Encontrar una ecuación de la recta que pasa por el punto $P_0(-2; 5)$ y tiene pendiente $m = \frac{3}{4}$

Solución

Por la definición de la ecuación de la recta denominada ecuación punto-pendiente, se tiene que $y - y_0 = m(x - x_0)$

$$\text{Al reemplazar con los datos, } y - 5 = \frac{3}{4}(x + 2)$$

$$\text{Entonces, la recta en forma explícita es } y = \frac{3}{4}x + \frac{13}{2}$$

Ejemplo 13

Encontrar una ecuación de la recta que pasa por el punto $P_0(3; -1)$ y cuyo ángulo de inclinación es $\theta = \frac{\pi}{3}$

Solución

$$\text{Se sabe que } m = \operatorname{tg} \theta \Rightarrow m = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \Rightarrow m = \sqrt{3}$$

$$\text{Luego, } y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y + 1 = \sqrt{3}(x - 3)$$

$$\text{Entonces, la ecuación implícita de la recta es } y = \sqrt{3}x - (3\sqrt{3} + 1)$$

Ejercicio 2-4

Encontrar la ecuación de la recta en sus formas implícita y explícita y, de ser posible, también la ecuación segmentaria en cada uno de los siguientes casos.

- Cuando contiene al punto $(1; -3)$ y un vector normal es $\vec{n} = (2; 5)$
- Cuando contiene al origen de coordenadas y un vector normal es $\vec{n} = (6; -7)$
- Cuando es perpendicular al eje x y contiene al punto $(-4; 3)$
- Cuando es perpendicular al eje de ordenadas y pasa por el punto $(0; 3)$
- Cuando contiene a la altura trazada desde el vértice A del triángulo cuyos vértices son los puntos $A(-3; -2)$, $B(3; 1)$ y $C(6; -4)$

Trazar el gráfico para cada situación planteada.

2.1.4 Posiciones relativas de rectas en el plano

Investigar la posición relativa de dos rectas en el plano significa indagar si las rectas son paralelas, perpendiculares, o si se intersectan en un punto.

En los apartados 2.1.4.1, 2.1.4.2 y 2.1.4.3, enunciaremos las condiciones necesarias y suficientes para estudiar las posiciones relativas de dos rectas en el plano.

Para ello, consideraremos las ecuaciones de dos rectas, r_1 y r_2 , definidas por medio de:

■ Sus ecuaciones paramétricas cartesianas (o formas equivalentes)

$$r_1: \begin{cases} x = x_0 + \lambda_1 a_1 \\ y = y_0 + \lambda_1 a_2 \end{cases} \quad \lambda_1 \in \mathbb{R}, \quad \text{donde } \vec{a} = (a_1; a_2) / r_1 \quad \vec{a} \neq \vec{0}$$

$$r_2: \begin{cases} x = x_1 + \lambda_2 b_1 \\ y = y_1 + \lambda_2 b_2 \end{cases} \quad \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad \text{donde } \vec{b} = (b_1; b_2) / r_2 \quad \vec{b} \neq \vec{0}$$

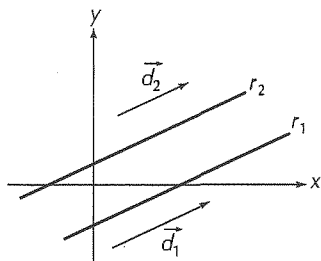
■ Sus ecuaciones implícitas $r_1: Ax + By + C = 0$ y $r_2: A'x + B'y + C' = 0, r_2$

■ Sus ecuaciones explícitas $r_1: y = m_1x + b_1$ y $r_2: y = m_2x + b_2$

2.1.4.1 Rectas paralelas

Las rectas r_1 y r_2 son paralelas si, y sólo si:

Figura 2-19



- Sus vectores directores son paralelos (ver figura 2-19).

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}: \vec{a} = \lambda \vec{b} \Rightarrow (a_1; a_2) = \lambda (b_1; b_2) \Rightarrow a_1 = \lambda b_1 \wedge a_2 = \lambda b_2$$

Equivalente a: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \lambda$ siempre que los cocientes tengan sentido.

- Sus vectores normales son paralelos (ver figura 2-20).

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}: \vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2 \Rightarrow (A; B) = \lambda (A'; B') \Rightarrow A = \lambda A' \wedge B = \lambda B'$$

Equivalente a: $\frac{A}{B'} = \frac{A'}{B} = \lambda$ siempre que los cocientes tengan sentido.

Figura 2-20

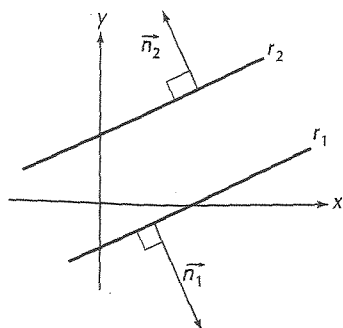
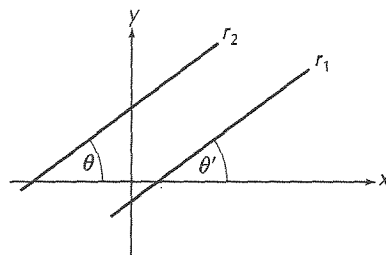
3. Tienen la misma pendiente $m_1 = m_2$ (ver figura 2-21).

Figura 2-21

**Ejemplo 14**

- a) Las rectas $r_1: \begin{cases} x = 2 - 3\lambda_1 \\ y = 4 + 2\lambda_1 \end{cases}$ y $r_2: \begin{cases} x = 2 - 6\lambda_2 \\ y = 3 + 4\lambda_2 \end{cases}$ son paralelas, $\frac{-3}{-6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
- b) Las rectas $r_1: 2x + 3y + 5 = 0$ y $r_2: 10x + 15y + 3 = 0$ son paralelas, ya que $\frac{2}{10} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$
- c) Las rectas $r_1: y = -\frac{2}{3}x - 1$ y $r_2: y = -\frac{2}{3}x + 3$ son paralelas, $m_1 = m_2 = -\frac{2}{3}$

En (a) y (b) del ejemplo anterior, la proporción entre las coordenadas de los vectores puede plantearse sólo si tales coordenadas son no nulas. Si sucede que algunas de las coordenadas de los vectores directores o normales es nula, esto implica que las rectas pueden ser verticales u horizontales. Claramente, dos rectas verticales o dos rectas horizontales son paralelas.

Ejemplo 15

- a) Las rectas $r_1: \begin{cases} x = -1 \\ y = 4 + 2\lambda_1 \end{cases}$ y $r_2: \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 + 4\lambda_2 \end{cases}$ con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ son rectas verticales (paralelas al eje de ordenadas), por lo tanto son paralelas. Observemos que los vectores directores de las rectas son, respectivamente, $\vec{d}_1 = (0; 2)$ y $\vec{d}_2 = (0; 4)$, y ambos vectores son paralelos al vector \vec{j} .
- b) Las rectas $r_1: 3y + 9 = 0$ y $r_2: -15y + 30 = 0$ son rectas horizontales (paralelas al eje de abscisas), por lo tanto son paralelas. Observemos que los vectores normales de las rectas son, respectivamente, $\vec{n}_1 = (0; 3)$ y $\vec{n}_2 = (0; -15)$, y ambos vectores son ortogonales al vector \vec{i} .

2.1.4.2 Rectas coincidentes

Sean r_1 y r_2 dos rectas en el plano.

Diremos que r_1 y r_2 son coincidentes, si solo se verifica que: $r_1 \subset r_2 \wedge r_2 \subset r_1$.

Dejamos al lector el ejercicio de probar que la definición previa explica que dos rectas coinciden cuando siendo paralelas tienen un punto en común.

Ejemplo 16

- a) Las rectas $r_1: \begin{cases} x = 2 - 3\lambda_1 \\ y = 4 + 2\lambda_1 \end{cases}$ y $r_2: \begin{cases} x = -1 - 6\lambda_2 \\ y = 6 + 4\lambda_2 \end{cases}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ son paralelas, $\frac{-3}{-6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; además, si consideramos, por ejemplo, al punto $P_1(2; 4) \in r_1$, sucede que este punto pertenece a la recta r_2 , pues $r_2: \begin{cases} 2 = -1 - 6\lambda_2 \\ 4 = 6 + 4\lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \lambda_2 = -\frac{1}{2}$, en consecuencia son rectas coincidentes.
- b) Las rectas $t \rightarrow 2x + 3y + 5 = 0$ y $r \rightarrow 10x + 15y + 25 = 0$ son coincidentes, pues $\frac{2}{10} = \frac{3}{15} = \frac{5}{25}$. (Observe que si multiplicamos la ecuación de la recta r_1 por 5 obtenemos la ecuación de la recta r_2 .)
- c) Es evidente que las rectas $r_1: y = -\frac{2}{3}x - 1$ y $r_2: y = -\frac{2}{3}x - 1$ son coincidentes.

2.1.4.3 Rectas perpendiculares

Figura 2-22

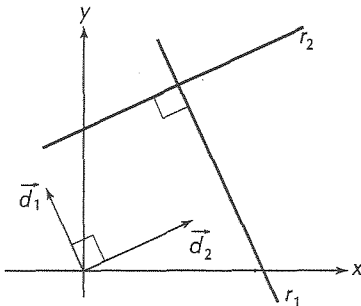
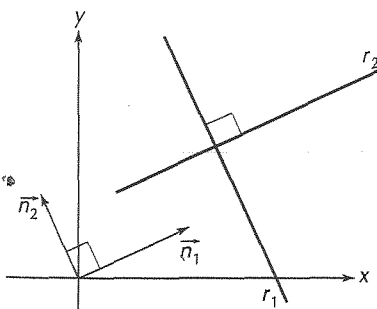


Figura 2-23



1. Las rectas r_1 y r_2 son perpendiculares si sus vectores directores son perpendiculares (ver figura 2-22).

$$\text{Si } \vec{a} = (a_1; a_2) // r_1 \text{ y } \vec{b} = (b_1; b_2) // r_2, \text{ es } r_1 \perp r_2 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\text{Entonces, si } \vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$$

$$\text{Por lo tanto, } r_1 \perp r_2 \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$$

2. Las rectas r_1 y r_2 son perpendiculares si sus vectores normales son perpendiculares (ver figura 2-23).

$$\text{Si } \vec{n}_1 = (A; B) \perp r_1 \text{ y } \vec{n}_2 = (A'; B') \perp r_2, \text{ es } r_1 \perp r_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$$

$$\text{Entonces, si } \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Rightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Rightarrow AA' + BB' = 0$$

$$\text{Por lo tanto, } r_1 \perp r_2 \Leftrightarrow AA' + BB' = 0$$

3. Las rectas r_1 y r_2 son perpendiculares si sus pendientes verifican la relación $m_1 \cdot m_2 = -1$

Esta condición necesaria y suficiente equivale a la enunciada en (2), ya que si $r_1: Ax + By + C = 0$, entonces:

$$r_1: y = \left(-\frac{A}{B}\right)x + \left(-\frac{C}{B}\right), \text{ donde } m_1 = -\frac{A}{B} (B \neq 0) \quad (\text{I})$$

Si $r_2: A'x + B'y + C' = 0$, entonces:

$$r_2: y = \left(-\frac{A'}{B'}\right)x + \left(-\frac{C'}{B'}\right), \text{ donde } m_2 = -\frac{A'}{B'} (B' \neq 0) \quad (\text{II})$$

Luego:

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \Leftrightarrow \left(-\frac{A}{B}\right) \cdot \left(-\frac{A'}{B'}\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{AA'}{BB'} = -1 \Leftrightarrow AA' = -BB' \Leftrightarrow AA' + BB' = 0,$$

que es la condición de perpendicularidad de dos rectas expresadas en forma implícita.

Ejemplo 17

a) Las rectas $r_1: \begin{cases} x = 2 + 4\lambda \\ y = -3 - 5\lambda \end{cases}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ y $r_2: \frac{x}{15} = \frac{y+2}{12}$ son perpendiculares ya que:

$$\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 = (4; -5) \cdot (15; 12) = 4 \cdot 15 + (-5) \cdot 12 = 0$$

b) Las rectas $r_1: 2x + 3y + 5 = 0$ y $r_2: 9x - 6y + 3 = 0$ son perpendiculares ya que:

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (2; 3) \cdot (9; -6) = 2 \cdot 9 + 3 \cdot (-6) = 0$$

c) Las rectas $r_1: y = -\frac{4}{5}x + 3$ y $r_2: y = \frac{5}{4}x - 2$ son perpendiculares pues:

$$m_1 \cdot m_2 = \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \frac{5}{4} = -1$$

La condición (3) excluye los casos de rectas de pendiente nula. Recordemos que una recta de pendiente nula es una recta horizontal.

En el análisis de perpendicularidad, una recta horizontal siempre es perpendicular a una recta vertical.

Ejemplo 18

La recta vertical $r_1: 2x + 5 = 0$ y la recta horizontal $r_2: y = 3$ son perpendiculares.

En este caso no se puede confirmar la perpendicularidad aplicando (3), pero sí mediante la condición necesaria y suficiente enunciada en (2):

$$\vec{n}_1 = (2; 0) \perp r_1 \text{ y } \vec{n}_2 = (0; 1) \perp r_2, \text{ entonces } \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (2; 0) \cdot (0; 1) = 0$$

2.1.4.4 Punto de intersección entre dos rectas

Sean r_1 y r_2 dos rectas en el plano.

Nuestro objetivo será encontrar el conjunto de todos los puntos del plano que pertenecen a ambas rectas simultáneamente; es decir, aquellos puntos que satisfacen las ecuaciones de r_1 y r_2 .

Llamamos A a dicho conjunto, obsérvese que existen tres posibilidades: 1) A es vacío, 2) A tiene un elemento y 3) A tiene infinitos elementos.

Ejemplo 19

Encontrar, si existe, el o los puntos de intersección entre las rectas:

$$r_1: \begin{cases} x = 2 + \lambda_1 \\ y = 4 + 2\lambda_1 \end{cases} \text{ y } r_2: \begin{cases} x = 2 + 2\lambda_2 \\ y = 6 - \lambda_2 \end{cases} \text{ con } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

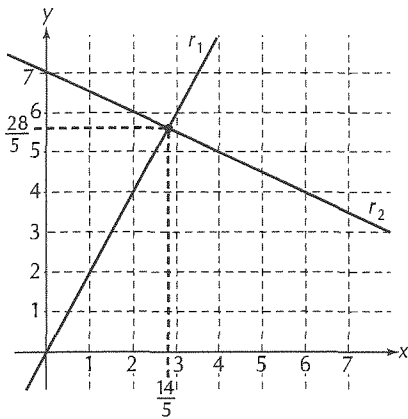
Solución

Si existe $P_0(x_0; y_0) = r_1 \cap r_2$, entonces existe $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ y $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{cases} x_0 = 2 + \lambda_1 \\ y_0 = 4 + 2\lambda_1 \end{cases} \text{ y } \begin{cases} x_0 = 4 + 2\lambda_2 \\ y_0 = 6 - \lambda_2 \end{cases}, \text{ entonces } \begin{cases} 2 + \lambda_1 = 4 + 2\lambda_2 \\ 4 + 2\lambda_1 = 6 - \lambda_2 \end{cases} \quad (I)$$

Resolvemos el sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas planteado en (I):

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2\lambda_2 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow 4\lambda_2 + \lambda_2 = 2 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{2}{5}$$

Figura 2-24

Luego, si $\lambda_2 = \frac{2}{5}$, es $\lambda_1 = \frac{4}{5}$

Por lo tanto, si reemplazamos $\lambda_1 = \frac{4}{5}$ en la ecuación de la recta r_1 , las coordenadas del punto de intersección entre las rectas son

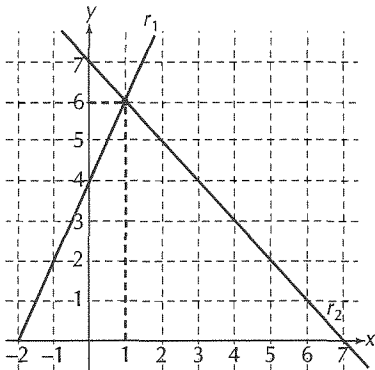
$$\begin{cases} x = 2 + \frac{4}{5} = \frac{14}{5} \\ y = 4 + 2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{28}{5} \end{cases} \Rightarrow P_0\left(\frac{14}{5}; \frac{28}{5}\right)$$

El lector puede verificar que si se reemplaza $\lambda_2 = \frac{2}{5}$ en la ecuación de la recta r_2 se obtiene el mismo punto de encuentro.

De manera gráfica ver figura 2-24.

Ejemplo 20

Encontrar, si existe, el o los puntos de encuentro entre las rectas $r_1: 2x - y + 4 = 0$ y $r_2: x + y - 7 = 0$

Figura 2-25**Solución**

Si existe $P_0(x_0; y_0) = r_1 \cap r_2$, entonces sucede que este punto verifica las ecuaciones de las rectas, es decir: $2x_0 - y_0 + 4 = 0$ y $x_0 + y_0 - 6 = 0$

Por lo tanto,

$$\begin{cases} 2x - y + 4 = 0 \\ x + y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = -x + 7 \end{cases} \Rightarrow 2x + 4 = -x + 7 \Rightarrow x = 1$$

Luego, si $x = 1$, entonces $y = 6$.

En consecuencia, el punto de intersección es $P_0(1; 6)$

De manera gráfica ver figura 2-25.

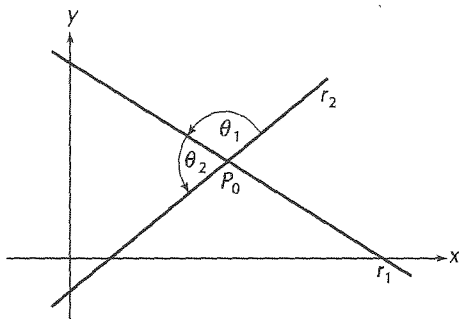
Observe el lector que para calcular el o los puntos de encuentro entre dos rectas hemos empleado un sistema de ecuaciones lineales. Relacionemos el procedimiento algebraico con la solución geométrica. ¿Cómo es el sistema? ¿Cuál es el conjunto solución? ¿Con qué coincide el conjunto solución?

Los sistemas de ecuaciones resueltos en los ejemplos son sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Cada ecuación representa una recta en el plano. Buscar la solución implica determinar qué valor numérico deben adoptar las incógnitas para verificar las ecuaciones presentes en el sistema. Los casos planteados en los ejemplos son sistemas con solución única, la cual es el punto de encuentro entre las rectas.

Los sistemas de ecuaciones lineales son, quizás, una de las herramientas de cálculo más utilizadas para resolver situaciones problemáticas. En este caso los hemos empleado para dar respuesta a problemas relacionados con la geometría. Este hecho va a repetirse en variadas situaciones a lo largo del libro, y nos dedicaremos específicamente al estudio de los sistemas de ecuaciones lineales en el capítulo 5.

2.1.5 Ángulos de dos rectas en \mathbb{R}^2

Figura 2-26

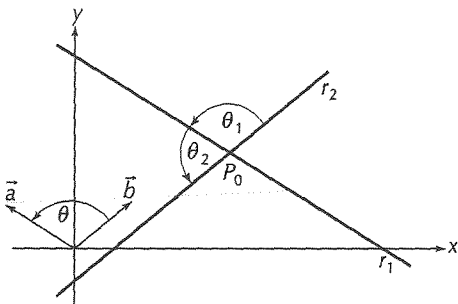


Consideremos dos rectas r_1 y r_2 como se muestra en la figura 2-26. Sea P_0 el punto de intersección entre las rectas. En este apartado expondremos cómo obtener la medida de los ángulos suplementarios θ_1 y θ_2 , medidos en sentido positivo, que se forman a partir del punto de intersección.

2.1.5.1 Cálculo del ángulo entre dos rectas considerando los vectores directores

Sean las ecuaciones de dos rectas r_1 y r_2 definidas por medio de sus ecuaciones paramétricas cartesianas (o formas equivalentes):

Figura 2-27



$$r_1: \begin{cases} x = x_0 + \lambda_1 a_1 \\ y = y_0 + \lambda_1 a_2 \end{cases} \quad \lambda_1 \in \mathbb{R}, \text{ donde } \vec{a} = (a_1; a_2) // r_1$$

$$r_2: \begin{cases} x = x_1 + \lambda_2 b_1 \\ y = y_1 + \lambda_2 b_2 \end{cases} \quad \lambda_2 \in \mathbb{R}, \text{ donde } \vec{b} = (b_1; b_2) // r_2$$

Si consideramos los vectores directores de cada recta con origen común en el origen de coordenadas (ver figura 2-27), sus direcciones forman un ángulo θ que es congruente con el ángulo θ_1 determinado por las rectas a partir del punto de intersección.

En consecuencia, aplicamos la fórmula de cálculo del ángulo entre vectores según el teorema 6 de la sección 1.2.2 del capítulo 1.

$$\angle(\vec{a}; \vec{b}) = \angle(r_1; r_2) = \arccos \theta = \arccos \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} \right) \quad (I)$$

Reemplazamos en (I) por las coordenadas de los vectores, y se obtiene

$$\angle(r_1; r_2) = \arccos \theta = \arccos \left(\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \right)$$

Luego, si $\theta = \theta_1$, entonces $\theta_2 = \pi - \theta$ y viceversa.

Ejemplo 21

Encontrar los ángulos que determinan las rectas $r_1: \begin{cases} x = 2 + \frac{1}{2}\lambda_1 \\ y = -3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_1 \end{cases}$ y $r_2: \begin{cases} x = 1 - \frac{1}{2}\lambda_2 \\ y = -3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_2 \end{cases}$

con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

Solución

Es dato los vectores directores de las rectas, esto es

$$\vec{a} // r_1 : \vec{a} = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad \text{y} \quad \vec{b} // r_2 : \vec{b} = \left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

Entonces, uno de los ángulos formados por las rectas es

$$\angle(r_1; r_2) = \arccos \theta = \arccos \left(\frac{\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}} \right)$$

$$\angle(r_1; r_2) = \theta = \arccos \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{3}$$

2.1.5.2 Cálculo del ángulo entre dos rectas considerando los vectores normales

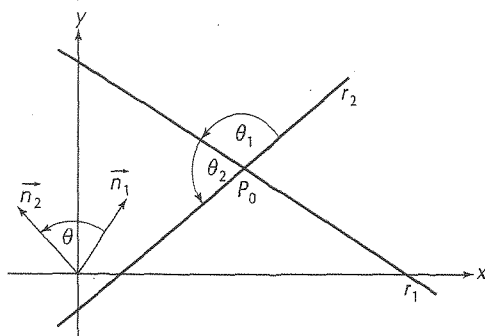
Sean las ecuaciones de dos rectas r_1 y r_2 definidas por sus ecuaciones implícitas

$$r_1: Ax + By + C = 0 \quad \text{y} \quad r_2: A'x + B'y + C' = 0, \quad \text{donde} \quad \vec{n}_1 = (A; B) \perp r_1 \quad \text{y} \quad \vec{n}_2 = (A'; B') \perp r_2$$

Si consideramos los vectores normales de cada recta con origen común en el origen de coordenadas (ver figura 2-28), veremos que sus direcciones forman un ángulo θ que es congruente con el ángulo θ_1 determinado por las rectas a partir del punto de intersección.

En consecuencia, si aplicamos la fórmula de cálculo del ángulo entre vectores según el teorema 6 de la sección 1.2.2 del capítulo 1.

Figura 2-28



$$\angle(\vec{n}_1; \vec{n}_2) = \angle(r_1; r_2) = \arccos \theta = \arccos \left(\frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{\|\vec{n}_1\| \|\vec{n}_2\|} \right) \quad (I)$$

Reemplazamos en (I) por las coordenadas de los vectores, se obtiene:

$$\angle(r_1; r_2) = \arccos \theta = \arccos \left(\frac{AA' + BB'}{\sqrt{A^2 + B^2} \sqrt{A'^2 + B'^2}} \right)$$

Luego, si $\theta = \theta_1$, entonces $\theta_2 = \pi - \theta$ y viceversa.

Ejemplo 22

Encontrar la medida de los ángulos que forman las rectas $r_1: x + y + 1 = 0$ y $r_2: -2x + 7 = 0$

Solución

Por conocer las ecuaciones implícitas de las rectas, son dato un vector normal a cada recta: $\vec{n}_1 = (1; 1) \perp r_1$ y $\vec{n}_2 = (-2; 0) \perp r_2$

Es claro que no son rectas paralelas.

Entonces aplicamos la fórmula (I):

$$\angle(r_1; r_2) = \arccos \left(\frac{(1; 1) \cdot (-2; 0)}{2\sqrt{2}} \right) = \arccos \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{3\pi}{4}$$

Por lo tanto, los ángulos que forman las rectas son $\theta_1 = \frac{3\pi}{4}$ y $\theta_2 = \frac{\pi}{4}$

Tanto en 2.1.5.1 como en 2.1.6.2 se obtiene que:

■ Si $\theta = 0$, entonces las rectas son paralelas.

■ Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, entonces las rectas son perpendiculares.

Ejercicio 2-5

Encontrar la medida del ángulo agudo formado por las siguientes rectas.

a) $r_1: -4x + 3y + 7 = 0$ y $r_2: x + y - 1 = 0$

b) $r_1: 3x - 4y - 11 = 0$ y $r_2: -6x + 8y = 0$

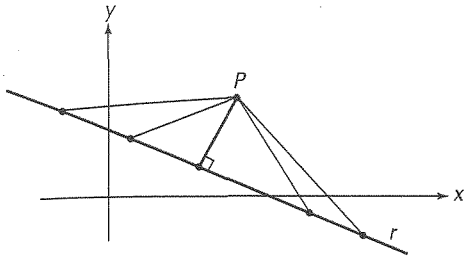
c) $r_1: (x; y) = (0; 3) + \lambda(-3; 2)$ y $r_2: (x; y) = (-1; 1) + \lambda(-3; -2)$

d) $r_1: y = \frac{2x-5}{3}$ y $r_2: y = -\frac{7}{2}x - 1$

e) $r_1: x + 1 = y - 1$ y $r_2: \frac{x+2}{-2} = y + 3$

2.1.6 Distancia de un punto a una recta en \mathbb{R}^2

Figura 2-29



Observe el lector que se pueden encontrar puntos de la recta tan lejanos como se quiera respecto del punto P . Sin embargo, existe un punto de la recta que realiza la menor distancia. De esta forma llegamos a la siguiente definición:

Sea una recta r y un punto P ambos en el plano.

Se llama distancia del punto P a la recta r al mínimo de todos los valores $\|PA\|$ con $A \in r$.

En símbolos: $d(P, r) = \min_{A \in r} \{\|PA\|\}$

Observación: Advierta el lector que el segmento que representa la distancia del punto P a la recta r , es perpendicular a la recta.

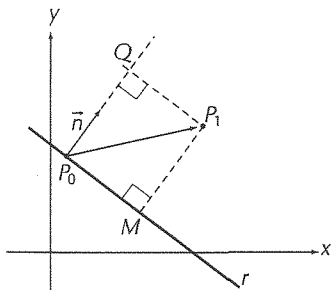
Teorema 3

La distancia del punto $P_1(x_1; y_1)$ a la recta $r: Ax + By + C = 0$ está dada por la fórmula:

$$\text{dist}(P_1; r) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Demostración

Figura 2-30



En la figura 2-30 hemos considerado un punto $P_0(x_0; y_0) \in r$, es decir: $Ax_0 + By_0 + C = 0$, y con origen en este punto ubicamos al vector normal de la recta, $\vec{n} = (A; B)$, asumiendo uno de sus sentidos posibles.

Consideremos como origen al punto P_0 y como extremo al punto P_1 , y así queda definido el vector $\overrightarrow{P_0P_1}$ en forma tal que si lo proyectamos ortogonalmente sobre la dirección del vector normal de la recta obtendremos el punto Q , formándose los triángulos rectángulos congruentes $\hat{P_0MP_1}$ y $\hat{QP_0P_1}$.

En consecuencia, la distancia del punto P_1 a la recta r está representada por la longitud del segmento P_0Q .

Pero, por construcción, la longitud del segmento $\overline{P_0Q}$ es igual a la longitud de la proyección escalar del vector $\overrightarrow{P_0P_1}$ sobre la dirección del vector normal de la recta.

Entonces

$$\text{dist}(P_1; r) = \text{long. } \overline{P_0Q} = \left| \text{proy}_{\vec{n}} \overrightarrow{P_0P_1} \right| \quad (I)$$

En (I), por la fórmula de proyección escalar y según los datos, se tiene que:

$$\left| \text{proy}_{\vec{n}} \overrightarrow{P_0P_1} \right| = \frac{|\overrightarrow{P_0P_1} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_1 + By_1 - (Ax_0 + By_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (II)$$

Donde $C = -(Ax_0 + By_0)$ (III) ya que $P_0(x_0; y_0) \in r : Ax_0 + By_0 + C = 0$
 Reemplazamos (III) en (II) para obtener:

$$\text{dist}(P_1; r) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

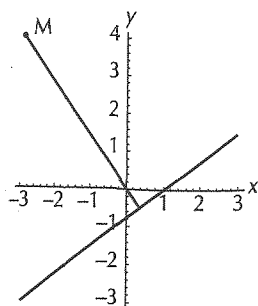
Notar que si el punto P pertenece a la recta r la distancia vale cero, pues se anula el numerador de la fórmula que expone el teorema 3.

Ejemplo 23

Determinar la distancia del punto $M(-3; 4)$ a la recta $r: 6x - 8y - 6 = 0$

Solución

Figura 2-31



Aplicamos la fórmula del teorema 4, y se tiene que:

$$\text{Dist}(M; r) = \frac{|6 \cdot (-3) - 8 \cdot 4 - 6|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{|-56|}{\sqrt{100}} = \frac{56}{10} = 5,6 \text{ unidades de longitud.}$$

De modo gráfico ver figura 2-31.

Ejercicio 2-6

Encontrar la distancia del punto P_0 a la recta r en cada uno de los siguientes casos.

- $P_0(-1; 0)$ y $r: 8x - 6y + 1 = 0$
- $P_0(3; -5)$ y $r: -4x - 3y - 6 = 0$
- $P_0(-3; 4)$ y r que pasa por el punto $P_1(1; 1)$ y su vector normal es $\vec{n} = (3; -4)$
- $P_0(0; 0)$ y $r: \frac{x+3}{-5} = \frac{y-6}{5}$
- $P_0(5; 1)$ y $r: \begin{cases} x = -2 + 3\lambda \\ y = 4 - \lambda \end{cases}$

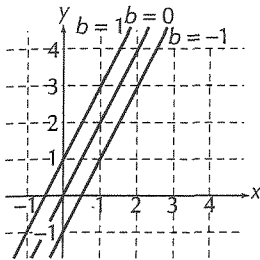
2.1.7 Familia o haz de rectas

En la sección 2.1 analizamos bajo qué condiciones puede obtenerse la ecuación de una recta. Si repasamos estos casos, en todos observaremos que una recta queda perfectamente determinada por dos condiciones: un punto y un vector director; un punto y un vector normal; dos puntos; un punto y el valor de la pendiente recta.

Por lo tanto, si sólo se da una condición, no existirá una única recta que la cumpla, sino que habrá infinitas rectas que satisfagan la condición enunciada.

Ejemplo 24

La ecuación $y=2x+b$ con $b \in \mathbb{R}$ es el conjunto de todas las rectas del plano de pendiente 2 (en consecuencia, rectas paralelas entre sí).

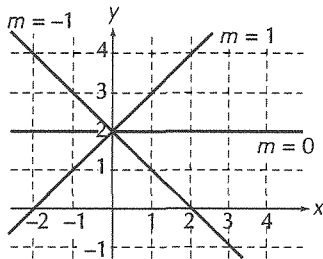
Figura 2-32


Por cada valor real que asignemos a b estaremos determinando una de las rectas (recordemos que, en la ecuación explícita, b es la ordenada al origen).

Algunas de las rectas que satisfacen la condición enunciada son: $b=0 \Rightarrow r_1: y=2x$, $b=-1 \Rightarrow r_2: y=2x-1$, $b=1 \Rightarrow r_2: y=2x+2$, y se muestran en la figura 2-32.

Ejemplo 25

La ecuación $y=mx+2$, con $m \in \mathbb{R}$, es el conjunto de todas las rectas del plano que pasan por el punto $(0; 2)$, excepto la recta vertical $x=0$ que no puede ser definida mediante la forma explícita de la recta.

Figura 2-33


Por cada valor real que asignemos a m estaremos determinando una de las rectas (recordemos que, en la ecuación explícita, m es la pendiente de la recta).

Algunas de las rectas que satisfacen la condición enunciada son $m=0 \Rightarrow r_1: y=2$, $m=-1 \Rightarrow r_2: y=-x+2$, $m=1 \Rightarrow r_2: y=x+2$, y se muestran en la figura 2-33.

Considerando los ejemplos anteriores, enunciamos la siguiente definición:

La totalidad de las rectas del plano que satisfacen una única condición geométrica se llama familia o haz de rectas.

En particular, tiene especial interés la definición del haz de rectas que definen dos rectas que se intersectan en un punto del plano.

Teorema 4

Sean las rectas $r_1: Ax+By+C=0$ y $r_2: A'x+B'y+C'=0$ tales que $r_1 \cap r_2 = P_0(x_0; y_0)$

Sean los números reales h y k no nulos simultáneamente.

La familia de rectas, o el haz de rectas, que pasan por el punto $P_0(x_0; y_0)$ queda representada por:

$$\mathcal{H} \rightarrow h(Ax+By+C)+k(A'x+B'y+C')=0$$

Demostración

Mostraremos que $\mathcal{H} \rightarrow h(Ax + By + C) + k(A'x + B'y + C') = 0$ (I) representa a la familia de rectas que pasan por el punto $P_0(x_0; y_0)$

Con valores reales arbitrarios h y k , no nulos simultáneamente, la relación (I) es lineal en las variables x y y : $\mathcal{H} \rightarrow \underbrace{(hA + kA')}_{A''}x + \underbrace{(hB + kB')}_{B''}y + \underbrace{(hC + kC')}_{C''} = 0$, por lo tanto, geométricamente es una recta del plano.

Además, como $P_0(x_0; y_0)$ pertenece a las rectas r_1 y r_2 , se tiene que $Ax_0 + By_0 + C = 0$ y $A'x_0 + B'y_0 + C' = 0$, en consecuencia, en (I), se verifica que:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &\rightarrow h \underbrace{(Ax_0 + By_0 + C)}_{=0} + k \underbrace{(A'x_0 + B'y_0 + C')}_{=0} = 0 \\ \mathcal{H} &\rightarrow h \cdot 0 + k \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

Por lo tanto, para valores reales arbitrarios h y k , no nulos simultáneamente, se cumple que (I) representa una recta que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0)$

En particular:

- Si $h = 0$ y $k \neq 0$, se obtiene la ecuación de la recta r_1
- Si $h \neq 0$ y $k = 0$, se obtiene la ecuación de la recta r_2

En general, no interesan las rectas que definen el haz de rectas, pues son datos, sino la posibilidad de encontrar alguna de las otras rectas que pasan por el punto de intersección de las rectas que definen a dicho haz.

En función de esto, se trabaja con la ecuación del haz de rectas reducido. Para obtenerlo suponemos, por ejemplo, que $h \neq 0$.

Luego, al dividir por 1 a $\mathcal{H} \neq 0$ miembro a miembro en (I) resulta:

$$\mathcal{H}' \rightarrow (Ax + By + C) + \frac{k}{h}(A'x + B'y + C') = 0$$

Si convenimos en llamar $\lambda = \frac{k}{h}$, la ecuación del haz de rectas reducido es

$$\mathcal{H}' \rightarrow (Ax + By + C) + \lambda(A'x + B'y + C') = 0 \text{ con } \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{II})$$

Observemos que, en este caso, si $\lambda = 0$ obtenemos la ecuación de la recta r_1 , pero no sería posible asignar un valor al parámetro para definir la ecuación de la recta r_2 . Por ese motivo, la ecuación (II) se llama haz de rectas reducido; es decir, hay una recta que no puede definirse a partir del haz. Pero como esa recta es conocida, por ser uno de los datos del problema, la ecuación es aplicable sin restricciones.

Ejemplo 26

Encontrar una ecuación de la recta de pendiente 1 que pasa por el punto de intersección de las rectas $r_1: 2x + 3y - 6 = 0$ y $r_2: x + y - 1 = 0$

Solución

Las rectas dadas como dato no tienen pendiente 1, por lo tanto la recta incógnita de pendiente 1 pertenece al haz de rectas reducido:

$$\mathcal{H}' \rightarrow (2x + 3y - 6) + \lambda(x + y - 1) = 0 \quad (\text{I})$$

Operamos en (I) y encontramos la forma explícita de la recta: $y = \left(-\frac{2+\lambda}{3+\lambda}\right)x + \left(\frac{6+\lambda}{3+\lambda}\right)$

Entonces, como la recta que buscamos tiene pendiente 1, resulta que $\left(-\frac{2+\lambda}{3+\lambda}\right) = 1 \quad (\text{II})$

Resolvemos la ecuación (II) y obtenemos que $\lambda = -\frac{5}{2}$, luego reempla-

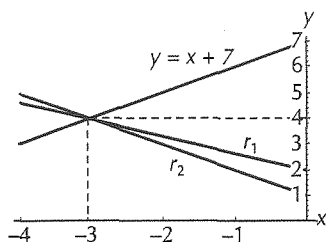
zamos $\lambda = -\frac{5}{2}$ en (I) para encontrar

$$\mathcal{H}' \rightarrow (2x + 3y - 6) + \left(-\frac{5}{2}\right)(x + y - 1) = 0$$

resulta que la recta de pendiente 1 que pasa por el punto de intersección de las rectas dadas es $r: x - y + 7 = 0$

En la figura 2-34 se muestra que las rectas r_1 , r_2 y r pertenecen al haz de rectas que pasan por el punto $P(-3; 4)$

Figura 2-34



Ejercicio 2-7

Dado el haz de rectas reducido $\mathcal{H}: (x - y - 1) + \lambda(3x - 2y - 6) = 0$, encontrar una ecuación de la recta del haz que:

- | | |
|--|--|
| a) pasa por el punto $A(4; -1)$ | i) pasa por el punto medio del segmento de extremos $A(3; 1)$ y $B(-7; 5)$ |
| b) pasa por el origen de coordenadas | j) es paralela a la recta $r: \frac{x-1}{-2} = \frac{y-6}{2}$ |
| c) es paralela al eje x | k) es perpendicular a la recta $r: (x; y) = (3; -1) + \lambda(4; -2)$ |
| d) es paralela al eje de ordenadas | l) tiene abscisa 5 al origen |
| e) es perpendicular al eje de abscisas | m) tiene distancia igual a 1 al punto $(2; 0)$ |
| f) es perpendicular al eje y | |
| g) tiene abscisa 4 al origen | |
| h) tiene pendiente -2 | |

2.1.8 Aplicaciones de modelos lineales

En la introducción hemos referido que por medio de modelos lineales es posible interpretar y resolver situaciones provenientes de otras ciencias. En el siguiente ejercicio evidenciamos otra situación que se modela a través de ecuaciones de rectas.

Ejercicio 2-8

Figura 2-35

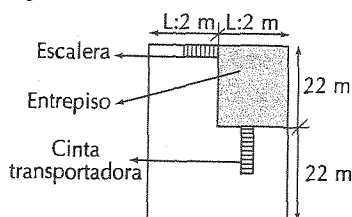
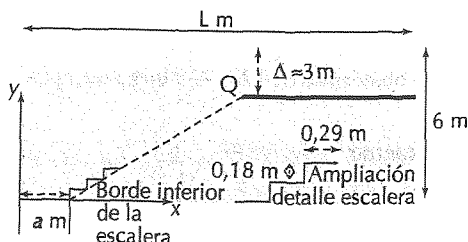


Figura 2-36



Un depósito de mercaderías de forma prismática tiene un volumen de 5544 m^3 , siendo la altura de la cubierta de 6 m y la longitud del lado mayor de su planta de 44 m . A fin de mejorar su aprovechamiento, se decide construir un entrepiso metálico que cubra la cuarta parte de su superficie, de acuerdo con el esquema que se muestra en la figura 2-35.

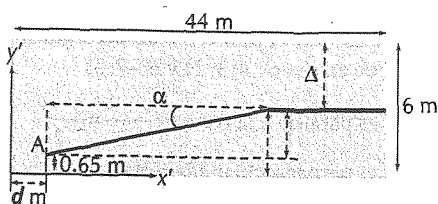
- 21.1. El acceso del personal al entrepiso se prevé mediante una escalera ubicada conforme se indica en la figura 2-36, con escalones de $0,18\text{ m}$ dealzada y $0,29\text{ m}$ de pedada. (Figura 2-36. Nota: Para fines prácticos, el espesor del entrepiso metálico no es significativo.)

Se pregunta:

- Con los datos precedentes, ¿a qué altura Δ del cielo-rasado más próxima a los 3 metros, pero no inferior a ésta, debe ubicarse el solado del entrepiso para que la escalera tenga un número entero de escalones?
- Si los ejes de replanteo x y y son los ubicados en la figura 2-36, ¿a qué distancia a del origen de los ejes de replanteo estará ubicado el primer escalón?
- De acuerdo con el esquema idealizado de la figura 2-36, ¿cuál es la ecuación de la recta que materializa el borde inferior de la escalera? (Adopte como sistema de referencia los ejes de replanteo x y y anteriores.)
- ¿Qué ángulo subtiende la escalera con el piso del depósito? (Ángulo de inclinación.)
- Con respecto al sistema de referencia adoptado, ¿qué coordenadas tendrá el punto Q extremo de la escalera?

- 21.2. En la disposición que muestra la figura 2-37 se va a instalar una cinta transportadora para elevar mercadería del nivel inferior del depósito al nivel del entrepiso. La pendiente de la cinta es del 20%. Su arranque está a $0,65\text{ m}$ del piso del depósito y finaliza en coincidencia con el solado del entrepiso (ver figura 2-37).

Figura 2-37



Usted tiene que hacer un replanteo en obra para instalar la cinta. Los ejes de referencia adoptados son los x' y y' indicados. Se pregunta:

- ¿A qué distancia d del eje y' se encuentra el arranque de la cinta?
- ¿Cuáles son las coordenadas del punto A de arranque referidas a los ejes x' y y' ?
- ¿Cuál es la ecuación de la recta que materializa la cinta referida a los ejes x' y y' ?
- ¿Cuál es el ángulo que subtiende la cinta con la horizontal?
- Si para optimizar el uso de la cinta con el propósito de recibir cargas más pesadas se decide disminuir su pendiente, de modo que el punto de arranque, siempre a $0,65\text{ m}$ del nivel del piso, se encuentre a $4,50\text{ m}$ de la pared representada por el eje y' , ¿cuál será la pendiente?
- En este último caso, se quiere transportar por la cinta un bulto cuyo peso es de 200 kg y se sabe que el coeficiente de rozamiento μ entre la cinta transportadora y el bulto es de $0,80$. ¿Es posible transportar el bulto al nivel superior o se caerá de la cinta transportadora? Justifique su respuesta. (Sugerencia: Aplique descomposición vectorial de

fuerzas. La fuerza que resiste el resbalamiento es la normal al plano de apoyo multiplicada por el coeficiente de rozamiento.)

- g) ¿Cuánto tendría que ser el valor del coeficiente de rozamiento para que un bulto del mismo peso que el anterior no pueda ser transportado?
- h) ¿Qué conclusión le permite inferir la respuesta al punto precedente?

Ejercicio 2-9

Resolver la situación inicial 1 planteada en el inicio de la sección 2.1.

Ejercicio 2-10

Resolver la situación inicial 2 planteada en el inicio de la sección 2.1.

Autoevaluación

Capítulo 2, Rectas y planos, sección 2.1, Rectas en el plano.

Ejercicio 2-11

Determinar el valor del parámetro k $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ para que la recta $r_1: x + y - 8 = 0$ forme un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ con la recta $r_2: x + ky + 1 = 0$. Realizar el gráfico.

Ejercicio 2-12

Calcular la ecuación de la recta que pertenece simultáneamente al haz $\mathcal{H}_1: (x - 2y + 1) + \lambda_1(3x + y - 3) = 0$ y al haz $\mathcal{H}_2: (x - 3) + \lambda_2(x + y + 1) = 0$.

Ejercicio 2-13

Deducir una fórmula para obtener la distancia entre dos rectas paralelas

$r_1: Ax + By + C = 0$ y $r_2: A'x + B'y + C' = 0$, siendo $C \neq C'$.

Ejercicio 2-14

Comprobar mediante dos procesos analíticos distintos que las rectas $r_1: 2x - 4y + 2 = 0$, $r_2: -6x - 2y + 6 = 0$ y $r_3: 2x + 3y - 4 = 0$ son concurrentes.

Ejercicio 2-15

Las rectas $r_1: x + y + 6 = 0$, $r_2: 3x + y - 3 = 0$, y $r_3: 4x - y + 8 = 0$ forman un triángulo.

- a) Calcular la medida de los ángulos interiores de dicho triángulo.
- b) Calcular el área del triángulo.
- c) Comprobar que las rectas que contienen a las alturas son concurrentes en un punto. (Este punto se denomina ortocentro.)
- d) Comprobar que las rectas que contienen a las medianas del triángulo son concurrentes en un punto. (Este punto se denomina baricentro.)